Τρίτη, 5 Δεκεμβρίου 2017

ΤΥΧΑΙΟΣ ΠΕΡΙΠΑΤΟΣ ΜΕ 2 ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗΣ

-Έστω ένας τυχαίος περίπατος που η κίνησή του περιγράφεται ως εξής:

→ Η θέση του τη χρ. στιγμή 0 είναι $x_0 = 0$

→ Η θέση του μετά από n "βήματα" δίνεται ως εξής:

$X_n = \sum_{i=1}^{n} V_i$, όπου V_i η τ.μ. που παριστάνει την i-οστή μετατόπιση

Υποθέτουμε ότι V_i είναι ανεξ/τες και ισόνομες τ.μ. με $EV_i = \mu$, $Var V_i = \sigma^2$

και $g(s) = E(e^{sV})$, $s \in S \subseteq \mathbb{R}$

-Έστω δύο σ. απορ. $a, -b$, με $a>0$ και $b>0$

[*το T συμβολίζει σε ποιο βήμα έγινε η απορρόφηση]

X_T*: η τ.μ. που παριστάνει τη θέση της σ.δ. κατά τη χρ. στιγμή της απορ

Τότε, $E\left[g^{-T}(s) \cdot e^{sX_T}\right] = 1, \forall s$ ← ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ WALD

• Θα μας απασχολήσουν 2 ερωτήματα:

Δυνατές τιμές της X_T: $a, -b$

1º Εύρεση των πιθανοτήτων τελ. απορ/σης

2º ET = μέσος χρόνος απορ/σης

③ P(τελικής απορρόφησης) $\underline{\underline{\text{βλ προηγούμενο μάθημα}}}$ 1

P(τελ. απορ/σης στο a) + P(τελ απορ/σης στο −b) = 1

Έστω ότι $\exists s_0 \neq 0$ τ.ω $g(s_0)=1$

Γι' αυτό το s_0 εφαρμόζω την ταυτότητα Wald, τότε:

$$E\left[e^{s_0 X_T}\right]=1 \xrightarrow[\text{της μ.τ. διακρ. τ.μ.}]{\text{εφαρμόζω τον ορισμό}} e^{s_0 a}\underbrace{P(X_T=a)}_{\substack{P(\text{τελ. απορ/σης στο } a)\\ \parallel \\ A}}+e^{-s_0 b}\underbrace{P(X_T=-b)}_{\substack{P(\text{τελ. απορ στο } -b)\\ \parallel \\ B}} = 1$$

$$\Rightarrow e^{s_0 a}\cdot A+e^{-bs_0}\cdot B=1 \Rightarrow e^{s_0 a}A+e^{-s_0 b}(1-A)=1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{A=\frac{1-e^{-bs_0}}{e^{as_0}-e^{-bs_0}} \qquad B=\frac{e^{as_0}-1}{e^{as_0}-e^{-bs_0}}}$$

Αλλά αυτά ισχύουν όταν $\exists s_0 \neq 0$, $g(s_0)=1$

Τι κάνω όταν $\nexists s_0 \neq 0$ τ.ω $g(s_0)=1$

$$\longrightarrow \lim_{s_0\to 0} A=\lim_{s_0\to 0}\frac{1-e^{-bs_0}}{e^{as_0}-e^{-bs_0}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{s_0\to 0}\frac{-(-b)\,e^{-bs_0}}{ae^{as_0}-(-b)\,e^{-bs_0}}=\frac{b}{a+b}$$

$$P\left(\substack{\text{τελ. απορ/σης}\\ \text{στο } -b}\right)=1-\frac{b}{a+b}=\frac{a}{a+b}$$

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

$$A=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-bs_0}}{e^{as_0}-e^{-bs_0}}, & s\neq 0\\[2ex] \dfrac{b}{a+b}, & s=0\end{cases} \qquad B=\begin{cases}\dfrac{e^{as_0}-1}{e^{as_0}-e^{-bs_0}}, & s\neq 0\\[2ex] \dfrac{a}{a+b}, & s=0\end{cases}$$

• Πότε $\exists\, s_0 \neq 0$ τ.ω $g(s_0)=1$

$\longrightarrow$ Όταν $\mu \neq 0$, όπου $EY = g'(0)$

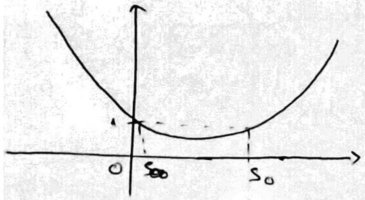
Σκιαγράφηση Απόδειξης

$g(s) = E(e^{sY})$, με $g(0)=1$

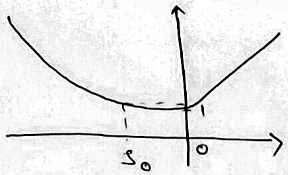
$g'(s) = E(Y e^{sY})$, με $g'(0) = EY = \mu$

$g''(s) = E(Y^2 e^{sY}) > 0$, γιατί είναι αναμ. τιμή θετικής ποσότητας

Η δεύτερη παράγωγος της $g(s)$ είναι θετική (η πρώτη παράγωγος αύξουσα)
Άρα, η συνάρτηση κυρτή



ή



2ο
$$ET = \begin{cases} \dfrac{EX_T}{\mu}, & \mu \neq 0 \\ \dfrac{EX_T^2}{\sigma^2}, & \mu = 0 \end{cases}$$
(Θα το δείξουμε)

$$E\left[g(s)^{-T} e^{sX_T}\right] = 1, \ \forall s$$

$$\xrightarrow[\text{ως προς } s]{\text{παραγωγίζω}} E\left[-T g(s)^{-T-1} g'(s) e^{sX_T} + g(s)^{-T} X_T e^{sX_T}\right] = 0$$

Την εφαρμόζω για $s=0$ (ξέρω $g(0)=1$, $g'(0)=\mu$)

$$E\left[-T\mu + X_T\right] = 0 \Rightarrow \mu ET = EX_T \overset{\mu \neq 0}{\Longrightarrow} \boxed{ET = \frac{EX_T}{\mu}}$$

$$EX_T = aP\left(\substack{\text{τελ. απορ.}\\ \text{στο } a}\right) - bP\left(\substack{\text{τελ. απορ.}\\ \text{στο } -b}\right) = aA - b(1-A)$$

Παραγωγίζω ξανά ως προς s:

$$E\left[-T(-T-1)\,g(s)^{-T-2}(g'(s))^{-2}\ldots\right] \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{ET = \frac{EX_T^2}{\sigma^2}}$$

όπου $EX_T^2 = a^2 P(X_T=a) + (-b)^2 P(X_T=b)$

Άσκηση 19

10€ ξεκινάει

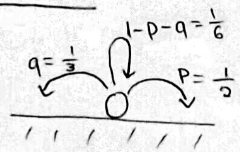
κερδίζει 1€, πιθ. $\frac{1}{2}$

χάνει 1€, πιθ. $\frac{1}{3}$

Το παιχνίδι σταματά όταν τα χρήματά του γίνονται 15€ ή 0€.

Να βρείτε την P(τα χρήματα να γίνουν 0€).

Λύση



Ξεκινάμε ορίζοντας σ.δ.

Έστω, λοιπόν, X_n σ.δ. που περιγράφει το κέρδος του παίκτη στο n-οστό παιχνίδι

Ισχύει $X_0=0$.

Τότε $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, όπου Y_i η i-οστή μετατόπιση, με Y_i ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.

$$P(Y_i=y) = \begin{cases} 1/2, & y=1 \\ 1/3, & y=-1 \\ 1/6, & y=0 \end{cases}$$

Ο τυχαίος αυτός περίπατος, που είναι και απλός, έχει δύο φρ. απορ/σης στο -10 και στο 5 $\Rightarrow -b=-10$ και $a=5$

1º ΒΗΜΑ

Θα δείξω ότι $P(\text{τελ. απορ/σης}) = 1$

2º ΒΗΜΑ

$EV_i = \mu = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1)\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \neq 0$

Υπολογίζω της $g(s)$

$g(s) = E(e^{sV}) = e^{s\cdot 1} \cdot \underset{p}{\frac{1}{2}} + e^{s(-1)} \underset{q}{\frac{1}{3}} + e^{s\cdot 0} \underset{1-p-q}{\frac{1}{6}}$

$g(s_0) = 1 \Rightarrow pe^{s_0} + qe^{-s_0} + (1-p-q) = 1 \Rightarrow p(e^{s_0})^2 + q + (1-p-q)e^{s_0} = e^{s_0} \Rightarrow$

$p(e^{s_0})^2 - (p+q)e^{s_0} + q = 0 \xrightarrow{\lambda = e^{s_0}} p\lambda^2 - (p+q)\lambda + q = 0$

$\Delta = (p+q)^2 - 4pq = (p-q)^2$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = \frac{q}{p}$

Άρα, όταν $p=q$, διπλή ρίζα το 1

Οπότε, $e^{s_0} = \begin{cases} 1 \\ q/p \end{cases} \Rightarrow s_0 = \begin{cases} 0 \\ \ln\frac{q}{p} \end{cases}$

Θέλω να $\exists s_0 \neq 0$, άρα κρατάω το $s_0 = \ln\frac{q}{p}$, τέτοιο ώστε $g(s_0) = 1$

Γι' αυτό το s_0 εφαρμόζω την ταυτότητα του Wald

Επομένως, $A = \frac{1 - e^{-bs_0}}{e^{as_0} - e^{-bs_0}} = \frac{1 - e^{-b\ln q/p}}{e^{a\ln q/p} - e^{-b\ln q/p}} = \frac{1 - e^{\ln(p/q)^b}}{e^{\ln(q/p)^a} - e^{\ln(\frac{p}{q})^b}} =$

$= \frac{1 - \frac{p^b}{q^b}}{\frac{q^a}{p^a} - \frac{p^b}{q^b}} = \frac{\frac{q^b - p^b}{q^b}}{\frac{q^{a+b} - p^{a+b}}{p^a q^b}} = p^a \frac{q^b - p^b}{q^{a+b} - p^{a+b}}$

και $B = 1 - A$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ - Άσκηση Για Το Σπίτι

Από τις σχέσεις για τα A, B που προσδιορίστηκαν στη Θεωρία, μπορεί κάποιος να προσδιορίσει τις πιθανότητες απορ/σης στην περίπτωση που έχουμε ένα φράγμα απορ/σης.

Ειδικότερα, $P(\text{απορ/σης στο } a) = \lim_{b\to\infty} P\left(\begin{array}{c}\text{απορ/σης στο } a \text{ όταν} \\ \exists \text{ δύο φρ. απορ. } a, -b\end{array}\right)$

- Όταν $s_0 = 0$ (δηλ. όταν $\mu=0$), τότε $Z_{\mu\tau} = \lim_{b\to\infty} \frac{b}{a+b} = 1$
- Όταν $s_0 \neq 0$ (δηλ. όταν $\mu \neq 0$), τότε $Z_{\mu\tau} = \lim_{b\to\infty} \frac{1-e^{-bs_0}}{e^{as_0}-e^{-bs_0}} =$

$$= \begin{cases} \xrightarrow{s_0>0} \frac{1}{e^{as_0}} \\ \xrightarrow[s_0<0]{} 1 \end{cases}$$

$$P\left(\begin{array}{c}\text{απορ/σης}\\ \text{στο } a\end{array}\right) = \begin{cases} 1, & s_0<0 \\ e^{-as_0}, & s_0 \geq 0 \end{cases} \qquad P\left(\begin{array}{c}\text{απορ/σης}\\ \text{στο } -b\end{array}\right) = \begin{cases} 1, & s_0 \geq 0 \\ e^{s_0 b}, & s_0<0 \end{cases}$$

- Όταν $s_0 = 0$, τότε $Z_{\mu\tau} = \lim_{a\to\infty} \frac{a}{a+b} = 1$
- Όταν $s_0 \neq 0$, τότε $Z_{\mu\tau} = \lim_{a\to\infty} \frac{e^{as_0}-1}{e^{as_0}-e^{-bs_0}} = \begin{cases} \xrightarrow{s_0>0} 1 \\ \xrightarrow[s_0<0]{} e^{s_0 b} \end{cases}$

Άσκηση 41

$X_n = \sum_{i=1}^{n} V_i$

Δύο φρ. απορ/σης $a, -b$

$$P(V_i = v) = \begin{cases} 1/4, & v=1 \\ 1/4, & v=2 \\ 1/2, & v=-2 \end{cases}$$

$X_0 = 0$

Να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος απορ/σης και οι πιθανότητες απορ/σης

Υπόδειξη: όχι αριθμητικά αποτελέσματα

Λυση

$$EY = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{2}(-2) = -\frac{1}{4} \neq 0$$

Άρα, $\exists s_0 \neq 0$ τέτοιο ώστε $g(s_0)=1$

$$g(s) = E(e^{sY}) = \frac{1}{4}e^{s\cdot 1} + \frac{1}{4}e^{s2} + \frac{1}{2}e^{s(-2)} = \frac{1}{4}e^{s} + \frac{1}{4}e^{2s} + \frac{1}{2}e^{-2s}$$

$g(s_0)=1$

Ασκηση 45

$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, $X_0=0$ δύο φρ. απορ/σης: $-b, a$

$EY_i = 7$

Να βρεθεί ο μέσος χρόνος απορ/σης και οι πιθανότητες απορ/σης

Υποδειξη: όχι αριθμητικά αποτελέσματα

Λυση

$\exists s_0 \neq 0$ τ.ω. $g(s_0)=1$ (αφού $EY_i=7$)

Ασκηση 47

$X_n = \sum Y_i$ δύο φράγματα απορ/σης: $-b, a$

$Y_i \sim N(10, 2^2)$ $g(s) = e^{\mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2}$

Λυση

P(τελ. απορ/σης) = 1

$EY_i = \mu = 10 \neq 0 \Rightarrow$ άρα $\exists s_0 \neq 0$ τέτοιο ώστε $g(s_0)=1 \Rightarrow$

$$e^{\mu s_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 s_0^2} = 1 \Rightarrow \mu s_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 s_0^2 = 0 \Rightarrow s_0\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 s_0\right) = 0 \Rightarrow$$

$s_0 = 0$ ή $\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 s_0 = 0 \Rightarrow s_0 = 0$ ή $s_0 = -5$ (Συνεχίζω βρίσκοντας τα A, B)

Άσκηση 48 (ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ)

Παίχτης κερδίζει 1€ με πιθ. 0.6 και χάνει 1€ με πιθαν 0.4

Έστω ότι έχει αρχικά b€, $b>0$

Σταματά να παίζει όταν έχει κέρδος a, ή όταν μηδενιστούν τα χρήματά του.

Έστω X_n η σ.δ. που περιγράφει το κέρδος.

(i) νδο είναι σίγουρο ότι θα τελειώσει το παιχνίδι (νδο P(τελ. απορ.)$=1$)

(ii) P(κέρδος a) $= P$(τελ. απορ/σης στο a) $=$;

(iii) ποιος ο χρόνος τερματισμός του παιχνιδιού; ($ET=$;)

(iv) αν είχε αρχικά απεριόριστο κεφάλαιο, ποια η πιθανότητα να τελειώσει το παιχνίδι;